

Вариант № 20387590

1.

Флакон шампуня стоит 150 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 800 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

Решение.

Во время распродажи шампунь станет стоить $150 - 0,25 \cdot 150 = 112,5$ рублей. Разделим 800 на 112,5:

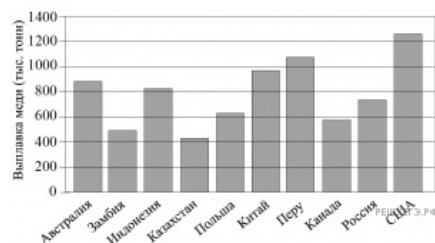
$$\frac{800}{112,5} = \frac{8000}{1125} = \frac{7875 + 125}{1125} = 7\frac{1}{9}.$$

Значит, можно будет купить 7 флаконов шампуня.

Ответ: 7.

2.

Какое место по выплавке меди занимает Канада?

**Решение.**

Расположим страны в порядке убывания количества выплавки меди в год:

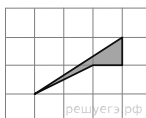
- 1) США
- 2) Перу
- 3) Китай
- 4) Австралия
- 5) Индонезия
- 6) Россия
- 7) Польша
- 8) Канада
- 9) Замбия
- 10) Казахстан

Канада находится на восьмом месте

Ответ: 8.

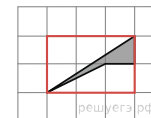
3.

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**Решение.**

Площадь четырехугольника равна разности площади большого прямоугольного треугольника, маленького прямоугольного треугольника, гипотенуза которого является стороной исходного четырехугольника и площади маленького квадрата. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \text{ см}^2.$$



4.

В сборнике билетов по истории всего 60 билетов, в 18 из них встречается вопрос по теме "Петр Первый". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Петр Первый".

Решение.

Вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Петр Первый", равна

$$\frac{18}{60} = 0,3$$

Ответ: 0,3.

5.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5}$.

Решение.

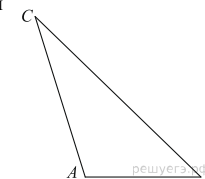
Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5} \Leftrightarrow (5^{-2})^{x+2} = 5^{x+5} \Leftrightarrow 5^{-2x-4} = 5^{x+5} \Leftrightarrow -2x-4 = x+5 \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: -3.

6.

Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .

**Решение.**

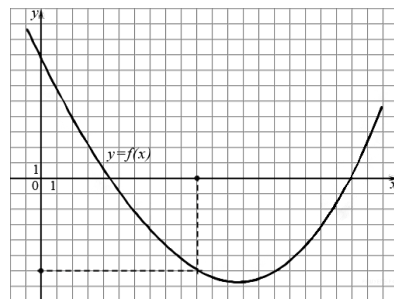
Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

7.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 10. Найдите $f'(10)$.



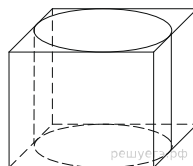
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Прямая проходит через точку $(10; -6)$, значит, $k = -0,6$. Поскольку угловой коэффициент равен значению производной в точке касания получаем: $f'(10) = -0,6$.

Ответ: $-0,6$.

8.

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 13. Объем параллелепипеда равен 676. Найдите высоту цилиндра.



Решение.

Высота параллелепипеда равна высоте вписанного в него цилиндра. Основанием параллелепипеда является квадрат, сторона которого в два раза больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому сторона основания равна 26, а площадь основания равна $26^2 = 676$. Тогда высота цилиндра равна

$$H = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{676}{676} = 1.$$

Ответ: 1.

9.

Найдите значение выражения: $49^2 \cdot 4^3 : 196$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$49^2 \cdot 4^3 : 196 = \frac{7^4 \cdot 2^6}{(2 \cdot 7)^2} = \frac{7^4 \cdot 2^6}{2^2 \cdot 7^2} = 7^2 \cdot 2^4 = 49 \cdot 16 = 784.$$

Ответ: 784.

10.

Груз массой 0,6 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t —

время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 1$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.

Найдем скорость груза через 7 секунд после начала колебаний:

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T} = 1 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 7}{12} = 1 \cdot \sin \frac{7\pi}{6} = 1 \cdot \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -0,5$$

Найдем кинетическую энергию груза через 7 секунд после начала колебаний:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,6 \cdot (-0,5)^2}{2} = 0,075$$

Ответ: 0,075

11.

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч — собственная скорость теплохода, тогда скорость теплохода по течению равна $u + 4$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $u - 4$ км/ч, $0 < u$. На весь путь теплоход затратил $54 - 8 = 46$ часов, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{513}{u+4} + \frac{513}{u-4} &= 46 \Leftrightarrow \frac{513 \cdot 2u}{u^2 - 16} = 46 \Leftrightarrow \frac{513u}{u^2 - 16} = 23 \Leftrightarrow \frac{513u}{u^2 - 16} = 23 \Leftrightarrow 513u = 23u^2 - 368 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 23u^2 - 513u - 368 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 23; \\ u = -0,7 \end{cases} \Leftrightarrow u = 23. \end{aligned}$$

Таким образом, скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч.

Ответ: 23.

12.

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$.

Решение.

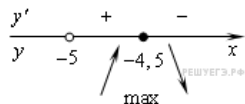
Функция определена и дифференцируема на $(-5; +\infty)$. Найдём производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2.$$

Найдём нули производной:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x+5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4,5$.

Ответ: $-4,5$.

13.

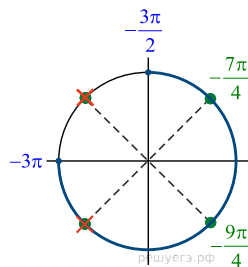
а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что первый множитель содержит тангенс, поэтому $\cos x \neq 0$. Второй множитель — квадратный корень, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно, область определения уравнения задается неравенством $\cos x > 0$. На этой области второй множитель не обращается в нуль. Рассмотрим случай, когда нулю равен первый множитель. Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm 1, \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) Корни из отрезка $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{9\pi}{4}$ и $-\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$.

14.

На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

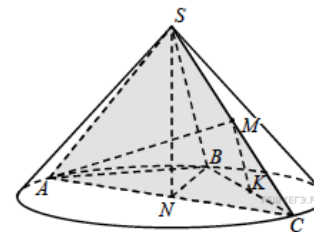
а) Точка N — середина отрезка AC . Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB , если $AS = 2, AC = \sqrt{10}$.

Решение.

а) Поскольку медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, плоскость ACS содержит высоту конуса. Значит, AC — диаметр основания конуса и SN — его высота.

Медиана BN треугольника ABC перпендикулярна прямой AC . Также отрезок BN перпендикулярен высоте конуса SN как радиус основания. Следовательно, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS , а значит, угол MNB прямой.



б) Пусть K — середина отрезка BC , $AS = 2, AC = \sqrt{10}$. Тогда искомый угол будет равен углу AMK , поскольку средняя линия MK треугольника BCS параллельна прямой SB , $MK = \frac{SB}{2} = 1$.

В треугольнике ACS медиана AM равна

$$\frac{\sqrt{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AS^2 + 2AC^2}}{2} = \sqrt{6}.$$

В прямоугольном треугольнике ABC имеем

$$AB = \sqrt{5}, BK = \frac{\sqrt{5}}{2}, AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \frac{5}{2}.$$

По теореме косинусов в треугольнике AMK имеем

$$\cos \angle AMK = \frac{AM^2 + MK^2 - AK^2}{2AM \cdot MK} = \frac{\sqrt{6}}{16} \Leftrightarrow \angle AMK = \arccos \frac{\sqrt{6}}{16}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{16}$.

15.

Решите неравенство: $9^x - 28 \leq 3^{x+3}$.

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^x$:

$$y^2 - 28 \leq 27y \Leftrightarrow y^2 - 27y - 28 \leq 0 \Leftrightarrow (y - 28)(y + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 28.$$

Тогда $-1 \leq 3^x \leq 28$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x \leq \log_3 28$.

Ответ: $(-\infty; \log_3 28]$.

16.

Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 11$, $KL = 10$, $LB = 4$.

Решение.

а) Расстояние от центра окружности до хорд одинаковой длины равны. Следовательно, точка O равноудалена от прямых AB , BC , CD и AD . Значит, она лежит на биссектрисе каждого из углов трапеции.

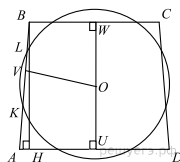
б) Опустим из точки O перпендикуляры OU , OV и OW на стороны AD , AB и BC соответственно. Тогда $OU = OV = OW$, $BV = BW$, UW — высота трапеции, а точка V — середина отрезка KL . Значит,

$$AU = AV = AK + \frac{KL}{2} = 16, \quad BW = BV = BL + \frac{KL}{2} = 9.$$

Пусть BH — высота трапеции. В прямоугольном треугольнике ABH имеем:

$$AB = AK + KL + LB = 25, \quad AH = AU - UH = AU - BW = 7;$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 24.$$



Ответ: б) 24

17.

Транснациональная компания Amako Inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Амако было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на $\frac{1}{3}$. В результате второго предложения Амако сумела увеличить число выкупленных акций на 20% (после второй скупки общее число выкупленных акций увеличилось на 20%), а в результате скупки по третьей цене — еще на 20%. Найдите цену третьего предложения и общее количество скупленных акций FAC, если начальное предложение составляло \$27 за одну акцию, а по второй цене Амако купила 15 тысяч акций.

Решение.

Предложения	Цена одной акции (\$)	Количество выкупленных акций	
		При данном предложении	Общее количество выкупленных акций
1	27		75 000 $15000 \cdot 0,2 = 75000$
2	36 $27 + \frac{1}{3} \cdot 27 = 27 + 9 = 36$	15 000	90 000 $75000 + 15000 = 90000$
3	48 $36 + \frac{1}{3} \cdot 36 = 36 + 12 = 48$		108 000 $90000 \cdot 1,2 = 108000$

Ответ: цена третьего предложения составила \$48 за одну акцию; всего было выкуплено 108 000 акций.

18.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x-a}\right)^2 - (a+9)\left(x + \frac{1}{x-a}\right) + 2a(9-a) = 0.$$

имеет ровно 4 решения.

Решение.

Заметим, что сумма корней уравнения $t^2 - (a+9)t + 2a(9-a) = 0$ равна $a+9$, а их произведение равно $2a(9-a)$. Поэтому корни — суть числа $2a$ и $9-a$. Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x-a} = 2a, \\ x + \frac{1}{x-a} = 9-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a + \frac{1}{x-a} = a, \\ x - a + \frac{1}{x-a} = 9-2a. \end{cases}$$

Каждое из уравнений совокупности может иметь не более двух корней.

Для того, чтобы исходное уравнение имело четыре корня, каждое из уравнений совокупности должно иметь по два корня и при этом уравнения не должны совпадать. Заметим, что если два взаимно

обратных числа y и $\frac{1}{y}$ различны, то $\left|y + \frac{1}{y}\right| > 2$. Используя это свойство, получаем, что четыре корня исходного уравнения будет иметь при

$$\begin{cases} a < -2, \\ a > 2, \\ 9-2a < -2, \\ 9-2a > 2, \\ a \neq 9-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2, \\ a > 2, \\ a > \frac{11}{2}, \\ a < \frac{7}{2}, \\ a \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2, \\ 2 < a < 3, \\ 3 < a < \frac{7}{2}, \\ a > \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2;) \cup (2; 3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

19.

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111.

Решение.

а) Да, может. Числа 3, 4, 5, 6 (или 5, 6, 7) составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 18.

б) Пусть a — первый член, d — разность, n — число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\frac{2a+d(n-1)}{2}n$. Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\frac{n(n+1)}{2} < 800$. Наибольшее натуральное решение этого неравенства $n = 39$.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии верно:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n = 111 \Leftrightarrow (2a+d(n-1))n = 2 \cdot 3 \cdot 37.$$

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 222. Если $n \geq 37$, то левая часть больше 222: $(2a+d(n-1))n \geq 37 \cdot 36 > 222$, следовательно, $n < 37$. Поскольку $n \geq 3$, получаем, что $n = 3$ или $n = 6$. Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 111 существуют: например, 36, 37, 38 и 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Ответ: а) да; б) 39; в) 3; 6.